

KUANTUM DOLANIKLIĞIN SÜREKLİ KUANTUM KANALLARIYLA ALGILANMASI

Abdullah Verçin

Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Fizik Bölümü

18 Mart 2016, Saat 11:40

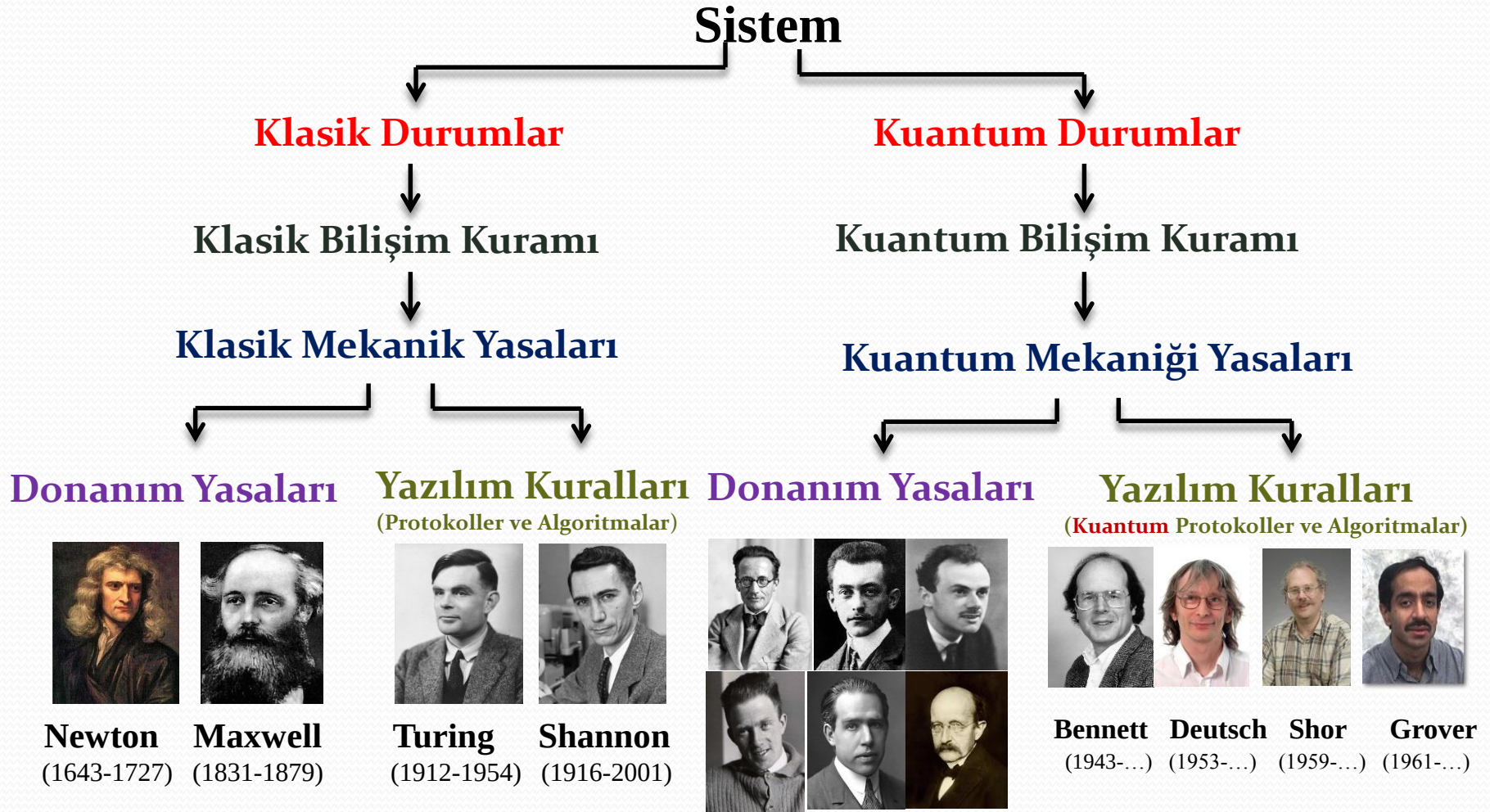
Kuantum Optik ve Bilişim Toplantısı, KOBİT-0
HACETTEPE ÜNİVERSİTESİ, BEYTEPE KAMPÜSÜ
Mehmet Akif Ersoy Salonu, ANKARA

İçerik

1. **KUANTUM BİLİŞİM KURAMI**
2. **KUANTUM KANALLAR**
3. **DOLANIKLIĞIN SÜREKLİ KUANTUM KANALLARLA
ALGILANMASI**
4. **AÇIK SİSTEMLERİN İNDİRGENMİŞ DİNAMİĞİ VE
KUANTUM KANALLAR**

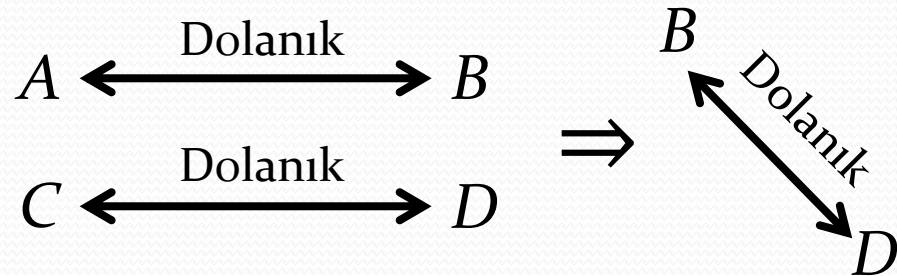
Bilişim Bilimi (*Information Science*)

Bir sistemin fiziksel durumlarıyla taşıyabileceği bilgilerin; sisteme kodlanması (*encoding*), işlenmesi (*processing*), iletilmesi (*transmission*), depolanması (*storage*), okunması (*decoding*) ve bu amaçlar doğrultusunda sistem tasarım ve üretimiyle ilgili her türlü etkinlik.



Öncü kuantum bilişim uygulamaları

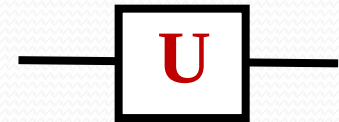
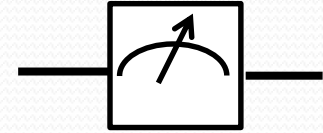
- Kuantum Uz-aktarım (*Teleportation*)
- Dolanıklık trampası
(dolanıklığın uz-aktarımı)
- Kuantum yoğun kodlama
(dolanıklıktan yararlanarak
kuantum durumlarıyla klasik
bilgi iletme kapasitelerinin ikiye katlanması)
- **Shor algoritmasıyla büyük pozitif tamsayıların kısa sürede
asal çarpanlarına ayrılması**
- Kuantum sistemlerin simülasyonları
- Kuantum kriptoloji
- Klasik olarak gerçekleştirilebilir pek çok süreç ve
yükümlülükte hızlanırlık



Kuantum Kanallar

27

- Ölçüm süreçleri (genel olarak) **tersinmez** kuantum kanallardır.
- Üniter kuantum kanallar (kuantum geçitler), **kapalı sistemlerin**



Schrödinger gelişimlerini betimler:

$$U : |\psi\rangle \rightarrow |\psi\rangle' = U|\psi\rangle ; |\psi\rangle \text{ --- } \boxed{U} \text{ --- } U|\psi\rangle$$

$$U : \rho \rightarrow \rho' = U\rho U^\dagger ; \rho \text{ --- } \boxed{U} \text{ --- } U\rho U^\dagger$$

★ **Açık sistemler** (çevreleriyle etkileşimde olan sistemler) için kuantum kanallar nasıldır?

Kuantum Kanallar

(Gerçellik ve Pozitiflik kavramlarının eşelenmesi)

$$\begin{array}{c} x < 0 \\ \hline 0 \\ \hline x > 0 \end{array} \rightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ kompleks sayılar}$$

Cebirsel tam değil
 $(x^2 + 1 = 0 \text{ denkleminin}$
 $\mathbb{R}' \text{ de çözümü yok}).$

Cebirsel olarak tam
 fakat pozitiflik
 (ve yön) yok.

İşlemcilerde (matrislerde) gerçellik ve pozitiflik

Kuantum mekaniğinde kompleks sayılar kaçınılmazdır:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = H|\psi\rangle .$$

$$\forall |\psi\rangle , \quad \langle \psi | A | \psi \rangle \in \mathbb{R} \iff A^\dagger = A \quad \text{Hermitesel işlemciler, kuantum gözlenebilirler}$$

$$\forall |\psi\rangle , \quad \langle \psi | A | \psi \rangle \geq 0 \iff A \geq 0 \quad \text{Pozitif gözlenebilirler}$$

$$A \geq 0 \text{ ve } B \geq 0 \not\Rightarrow AB \geq 0 \text{ ve } BA \geq 0$$



Sıradışılaşmazlık
(non-commutativity)

Gönderimlerde (süperoperatörlerde) gerçellik ve pozitiflik

$\Lambda : \mathfrak{B}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathfrak{B}(\mathcal{H})$ çizgisel bir gönderim olsun.

$\forall A = A^\dagger; \quad [\Lambda(A)]^\dagger = \Lambda(A)$ Hermiteselliği koruyan gönderimler

$\forall A \geq 0; \quad \Lambda(A) \geq 0$ Pozitif gönderimler
PMs: (**Positive Maps**)



Bileşik Sistemlerde “Gerçeklik” (Hermiteselliğin Korunumu)

$$[\Lambda(A)]^\dagger = \Lambda(A^\dagger) \Rightarrow [(id_k \otimes \Lambda)Y]^\dagger = (id_k \otimes \Lambda)Y^\dagger; \forall k \in \mathbb{N}_+$$

$$[(id_k \otimes \Lambda)Y]^\dagger = (id_k \otimes \Lambda)Y^\dagger \Rightarrow [\Lambda(A)]^\dagger = \Lambda(A^\dagger)$$

Hermiteselliği koruma özelliği (varsa eğer)
her tensörel genişlemede korunur.

Bileşik Sistemlerde Pozitiflik

$$(id_k \otimes \Lambda)(A \otimes B) = A \otimes \Lambda(B) \quad \forall k \text{ (id: identity map)}$$

$$A \geq 0, \quad B \geq 0 \text{ ve } \Lambda \text{ PM} \Rightarrow A \otimes \Lambda(B) \geq 0.$$

$$\sum_i A_i \otimes B_i \text{ durumunda da aynı önerme geçerli.}$$

Fakat her $C \geq 0, C \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_1) \otimes \mathfrak{B}(\mathcal{H}_2)$ için

$$(id_k \otimes \Lambda)C$$

pozitif olmayabilir.

Bileşik sistemlerde **pozitiflik**

$k = 2$ ve $\forall C \geq 0$ için $(id_2 \otimes \Lambda)C \geq 0 \Rightarrow \Lambda, 2\text{-pozitif}$

$\vdots$

$\vdots$

$k = n$ ve $\forall C \geq 0$ için $(id_n \otimes \Lambda)C \geq 0 \Rightarrow \Lambda, n\text{-pozitif}$

$\forall k \in \mathbb{N}_+$ ve $\forall C \geq 0$ için $(id_k \otimes \Lambda)C \geq 0 \Rightarrow \Lambda, CPM$

CPM: (**Completely Positive Map**)

Tamamen Pozitif Gönderim

(W. F. Stinespring, 1955)

Kuantum Kanallar

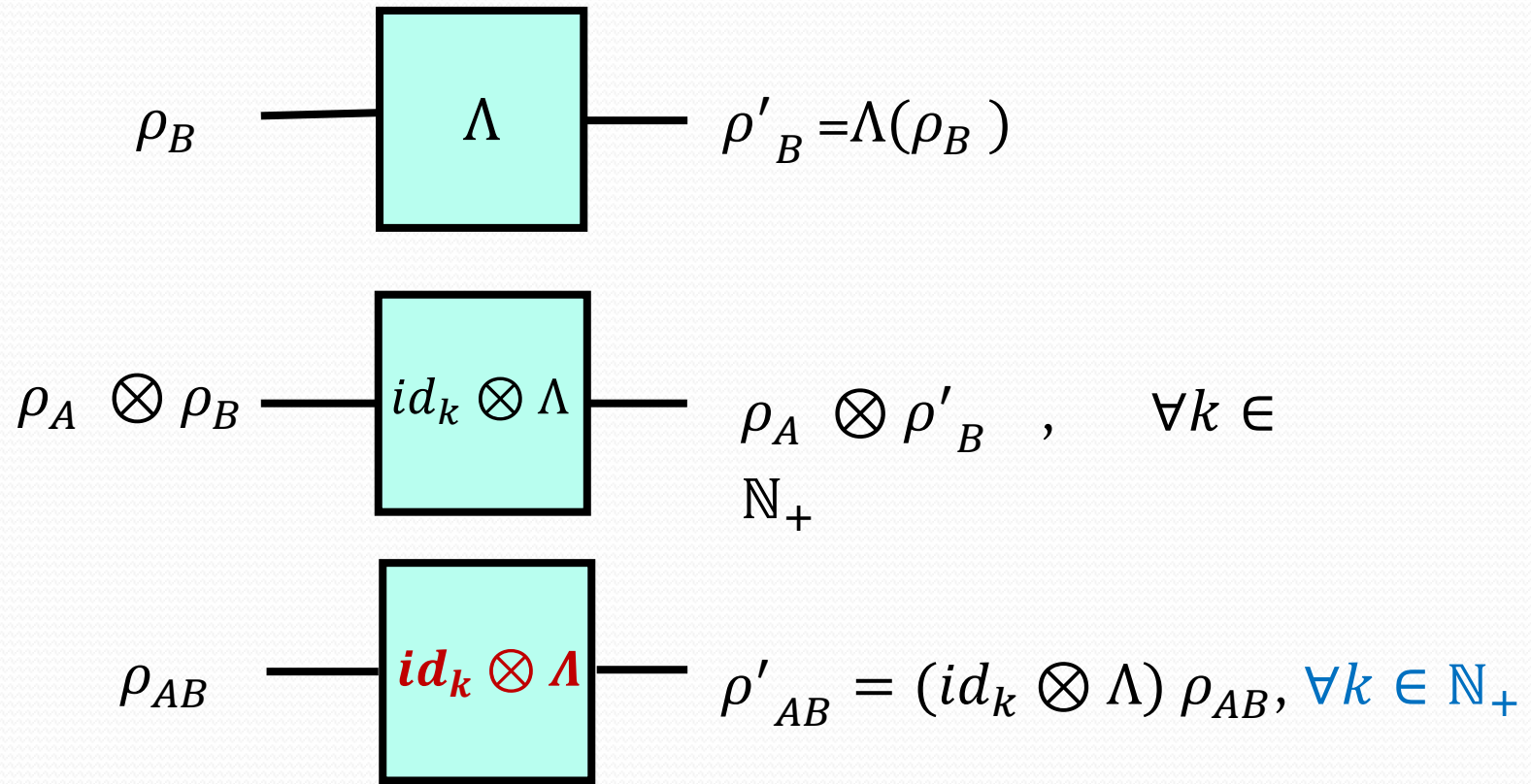
Tamamen pozitif ve iz-koruyan

$$\text{Tr}[\Lambda(A)] = \text{Tr} A$$

çizgisel Λ gönderimlerine kuantum kanallar denir.

CPTP maps

(B. Kraus ve G. Lindbland, 1970'ler)



Λ bir kuantum kanal ise, her $k \in \mathbb{N}_+$ için ρ'_{AB} bir yoğunluk işlemcisidir.

Choi-Jamiołkowski izomorfizm teoremi

Λ – koruyan ve $\Lambda \geq 0$ için ;

Λ bir kuantum kanaldır $\Leftrightarrow \mathcal{C} = (id_n \otimes \Lambda)\mathbf{M} \geq 0$.

Buradaki $\mathcal{C}$, Choi matrisi olarak bilinir ve

$$\mathbf{M} = \sum_{i,j=1}^n |i\rangle\langle j| \otimes |i\rangle\langle j|$$

boylandırılmamış en dolanık saf durum yoğunluk işlemcisidir.

(CJ-izomorfizmi, kuantum kanallar ve kuantum durumlar arasındaki izomorfizmdir.)

Dolanıklık Tanıkları

$\Lambda \geq 0$ fakat $\mathcal{C} = (id_n \otimes \Lambda)\mathbf{M}$ pozitif değilse $\mathcal{C}$ 'ye bir dolanıklık tanığı (*entanglement witness*) denir.

$$\rho \in Sep \quad \Rightarrow \quad Tr(\mathcal{C}\rho) \geq 0$$

$$Tr(\mathcal{C}\rho) < 0 \quad \Rightarrow \quad \rho \text{ dolanıktır.}$$

$$\mathcal{C}^\dagger = \mathcal{C}$$

(Barbara M. Terhal, 2001)

Örnek : Parçalı transpoz gönderimi

Parçalı transpoz Λ_T gönderimi pozitiftir fakat 2-pozitif bile değildir. Dolayısıyla CP de değildir.

$$\Lambda_T(e_{11}) = e_{11} , \quad \Lambda_T(e_{12}) = e_{21}$$

$$\Lambda_T(e_{22}) = e_{22} , \quad \Lambda_T(e_{21}) = e_{12}$$

$$\mathcal{C} = (id_2 \otimes \Lambda_T)M = \sum_{i,j=1}^2 e_{ij} \otimes \Lambda_T(e_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$spec(\mathcal{C}) = \{1, -1\}$$

↑
3-katlı

Peres-Horodecki Kriteri

$$(id_n \otimes \Lambda_T)\rho = \rho^\Gamma$$

- ❖ ρ ayrılabilir bir durum ise ρ^Γ da ayrılabilirdir.
- ❖ ρ^Γ en az bir negatif özdeğere sahipse ρ dolanıktır.

$$(id_n \otimes \Lambda_T)(\rho) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \rho \text{ PPT'dir.}$$

$$(id_n \otimes \Lambda_T)(\rho) < 0 \quad \Rightarrow \quad \rho \text{ dolanıktır.}$$

(Peres ve Horodecki 1996, Størmer 1981)

- ❑ Kuantum durumların kontrollü olarak işlenmesi (*quantum information processing*) ve dolanıklığın algılanması (*entanglement detection*) iki temel kuantum bilişimsel yükümlülüktür.
- ❑ Uygulamalı ve kuramsal her türlü amaç için ilk yükümlülük kuantum kanallarla gerçekleştirilir ve ilke olarak kuantum kanallar, laboratuarda doğrudan realize edilebilirdir.
- ❑ Dolanıklık tanıkları ve diğer yöntemlerle, dolanıklığın algılanması oldukça dolaylı ölçümlerle gerçekleştirilir. Çünkü CP olmayan gönderimler laboratuarda doğrudan realize edilemezler.
- ★ **Dolanıklığın algılanması, laboratuarda gerçekleştirilebilen doğrudan yöntemlerle başarılabilir mi?**

Dolanıklığın Sürekli Kuantum Kanallarla Algılanması

$$\mathcal{H}_A \cong \mathcal{H}_B = \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_n \quad \text{ve} \quad Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}_B)$$

$\Lambda_{\alpha\beta\gamma}: \mathfrak{B}(\mathcal{H}_B) \rightarrow \mathfrak{B}(\mathcal{H}_B)$ çizgisel ve Hermiteselliği koruyan bir gönderim:

$$\Lambda_{\alpha\beta\gamma}(Y) = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_n \text{Tr} Y_{11} - \alpha Y_{11} & -\gamma Y_{12} \\ -\gamma^* Y_{21} & \mathbb{I}_n \text{Tr} Y_{22} - \beta Y_{22} \end{pmatrix}$$

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \text{ve} \quad \gamma \in \mathbb{C}$$

γ^* : γ 'nın kompleks eşleniği, $\mathbb{I}_n$: $n \times n$ 'li birim matris

$$\Lambda_{\alpha\beta\gamma} \geq 0 \Leftrightarrow \alpha \leq 1, \quad \beta \leq 1 \text{ ve } |\gamma| \leq \sqrt{(1-\alpha)(1-\beta)}$$

Karşılık gelen **Choi matrisi** $\mathcal{C}_{\alpha\beta\gamma}$:

$$\mathcal{C}_{\alpha\beta\gamma} = \sum_{k,l=1}^{2n} E_{kl} \otimes \Lambda_{\alpha\beta\gamma}(E_{kl}); \quad \mathbf{M} = \sum_{k,l=1}^{2n} E_{kl} \otimes E_{kl},$$

$$= \begin{pmatrix} B_{11} - \alpha M_{11} & -\gamma M_{12} \\ -\gamma^* M_{21} & B_{22} - \beta M_{22} \end{pmatrix}.$$

$$B_{ab} = \mathbb{I}_n \otimes e_{ab} \otimes \mathbb{I}_n$$

$$M_{ab} = \sum_{i,j=1}^n \varepsilon_{ij} \otimes e_{ab} \otimes \varepsilon_{ij}$$

$$B_{ab}B_{cd} = \delta_{bc}B_{ad}$$

$$M_{ab}M_{cd} = \delta_{bc}nM_{ad}$$

$$M_{ab}B_{cd} = \delta_{bc}M_{ad}$$

Choi-Jamiołkowski izomorfizm teoremine göre;

(i) ρ ayrılabilir ise $\text{Tr}(\mathcal{C}_{\alpha\beta\gamma}\rho) \geq 0$.

(ii) $\alpha \leq 1, \beta \leq 1$ ve $|\gamma| \leq \sqrt{(1-\alpha)(1-\beta)}$ (*)

koşulları altında

$$\Lambda_{\alpha\beta\gamma}, \quad \text{CPM} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{C}_{\alpha\beta\gamma} \geq 0.$$

(iii) Diğer durumlarda ((*) koşulları sağlanıyorken)

$\mathcal{C}_{\alpha\beta\gamma}$ bir dolanıklık tanığıdır ve $\Lambda_{\alpha\beta\gamma}$ bu tanığa

karşılık gelen pozitif gönderimdir.

Keyfi çift boyutta, iki-parametrelili dolanıklık tanıkları ve kuantum kanal aileleri

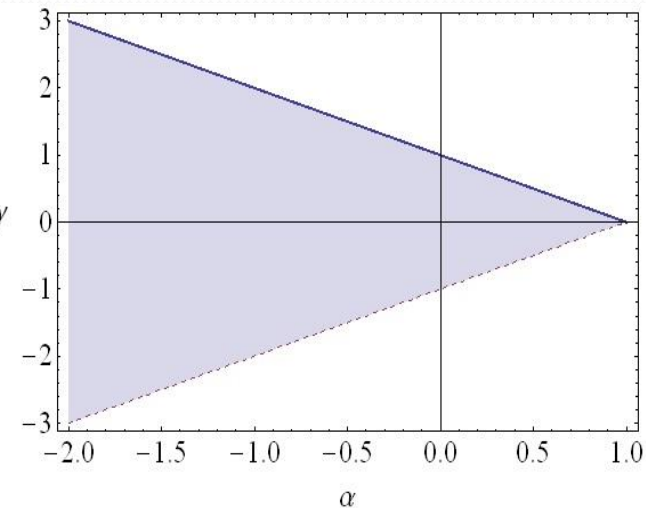
$\alpha = \beta$ ve $\gamma \in \mathbb{R}$ özel durumunda

$$\mathfrak{R} = \{\alpha, \gamma \mid \alpha \leq 1, |\gamma| \leq (1 - \alpha)\}$$

$\mathcal{C}_{\alpha\gamma}$ 'nin spektrumu:

$$\{\lambda_0 \underset{\uparrow}{=} 0, \quad \lambda_1 \underset{\uparrow}{=} 1, \quad \lambda_2^\pm \underset{\uparrow}{=} -\alpha n + 1 \pm n\gamma\}.$$

katlılıklar : $2n^2$, $2(n^2 - 1)$, 1



$$\mathcal{C}_{\alpha\gamma} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_2^{\pm} \geq 0.$$

$$\gamma \geq \alpha - \frac{1}{n} \quad \rightarrow \quad \mathfrak{R}_1$$

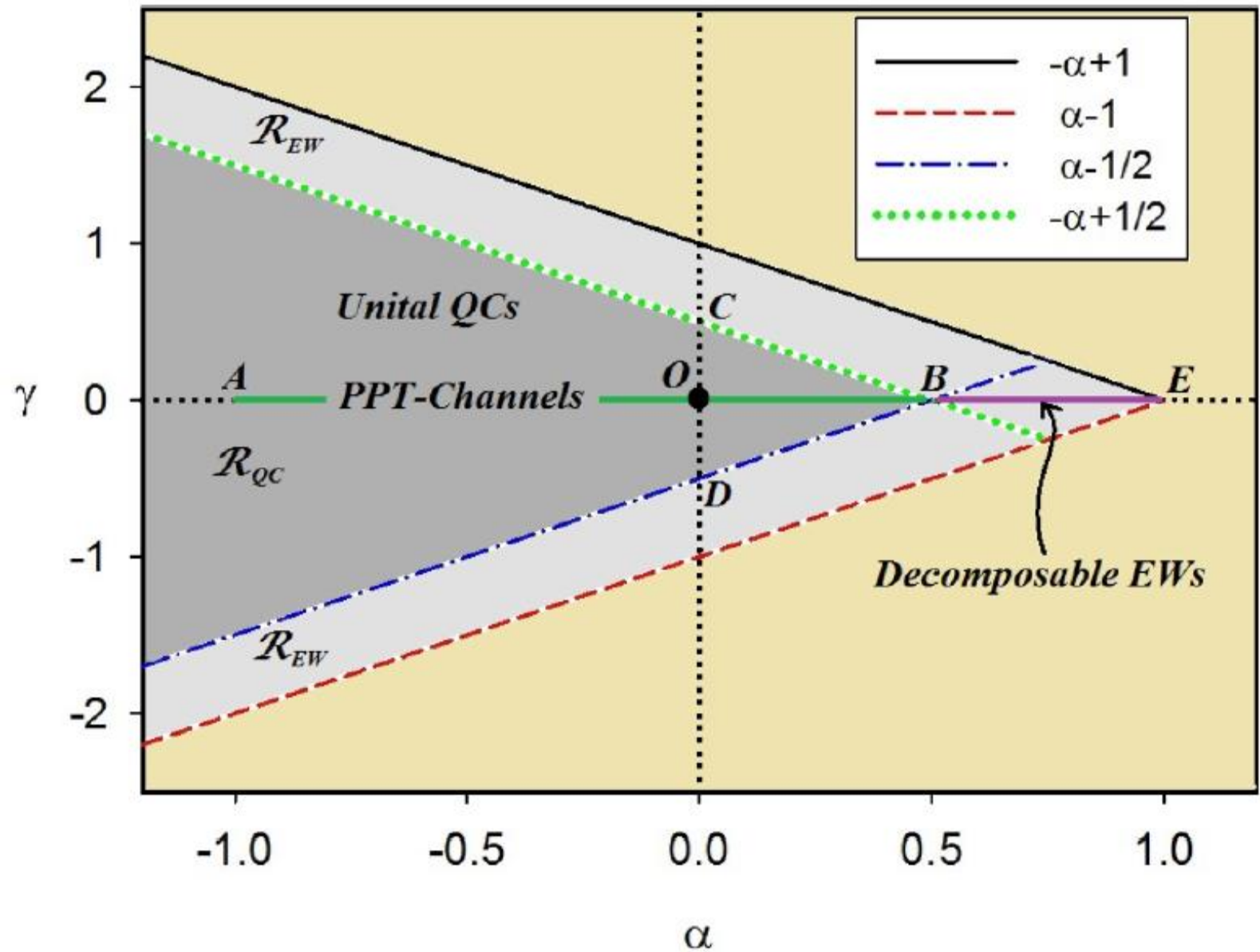
$$\gamma \leq -\alpha + \frac{1}{n} \quad \rightarrow \quad \mathfrak{R}_2$$

QC: Quantum Channel

$$\mathfrak{R}_{QC} = \mathfrak{R}_1 \cap \mathfrak{R}_2$$

EW: Entanglement Witness

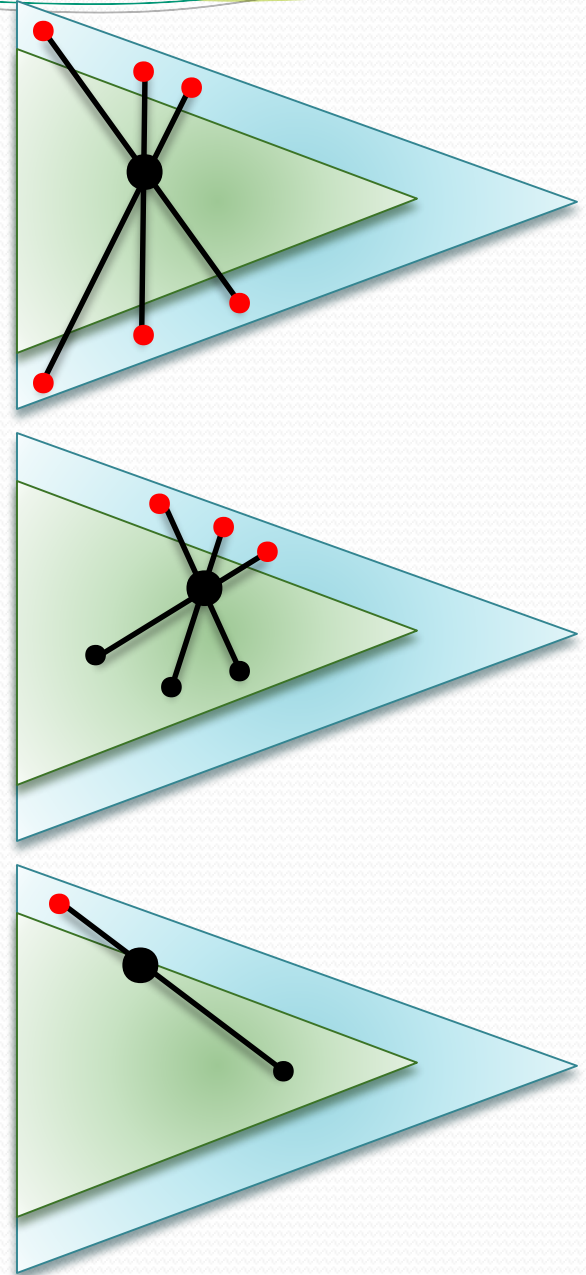
$$\mathfrak{R}_{EW} = \mathfrak{R} - \mathfrak{R}_{QC}$$



Teorem 1: $n > 1$ için, $\mathfrak{R}_{QC}$ ve $\mathfrak{R}_{EW}$ bölgelerinin her bir noktası, gerçel $\alpha = \beta$ ve γ koşulu altında Choi matrisiyle belirlenen sırasıyla, tek bir unital kuantum kanalını ve tek bir dolanıklık tanığının temsil eder. $n = 1$ için dolanıklık tanığı yoktur.

Teorem 2:

- (i) Her kuantum kanal; iki pozitif fakat CP-olmayan gönderimin bir karışımı olarak, (sayılamaz) çok sayıda farklı şekilde yazılabilir.
- (ii) Verilen herhangi bir kuantum kanal, pozitif fakat CP-olmayan bir gönderim ve başka bir kuantum kanalın bir karışımı olarak farklı şekillerde yazılabilir.
- (iii) Verilen bir kuantum kanal ve pozitif fakat CP-olmayan bir gönderimin karışımı olan tek bir sınır kuantum kanalı vardır.



Buradaki dolanıklık tanıklarıyla dolanıklıkları⁴ algılanabilir tüm ρ durumlarının kümesi (sabit $n > 1$ için):

$$\mathcal{D}_n = \{\rho \mid \text{Tr}(W_{\alpha\gamma}\rho) < 0, \quad (\alpha, \gamma) \in \mathcal{R}_{EW}\}$$

$$\Rightarrow \mathcal{C}_{\alpha'\gamma'} = cW_{\alpha\gamma} + (1 - c)\mathcal{C}_{00} \quad ; \quad c \in (0,1)$$

$$\Rightarrow \text{Tr}(\mathcal{C}_{\alpha'\gamma'}\rho) < (1 - c)\text{Tr}(\mathcal{C}_{00}\rho) \quad ; \quad c \in (0,1) \quad (*)$$

Teorem 3:

$$\rho \in \mathcal{D}_n \quad \Leftrightarrow \quad (*) \text{ denklemi sağlanacak şekilde en az bir } (\alpha'; \gamma') \in \mathcal{R}_{QC} \text{ vardır.}$$

Sonuçlar

- ★ C_{00} referans kanalı değiştirilerek, böyle pek çok (sayılamaz sonsuz) sayıda kuantum kanallar aracılığıyla dolanıklık algılama yöntemi mümkündür.
- ★ İlke olarak kuantum kanallar doğrudan laboratuarda gerçekleştirilebildiğinden, sürekli kanallar aracılığıyla dolanıklık algılama yöntemleri de laboratuarda doğrudan gerçekleştirilebilir.
- ★ Kuantum bilişim işleme ve dolanıklık algılama süreçleri, aynı deneysel düzenekler kullanılarak doğrudan deneysel yöntemlerle birlikte gerçekleştirilebilir.

PHYSICAL REVIEW A **90**, 042320 (2014)

Entanglement detection via continuous quantum channels

D. Duran,^{1,2,*} A. Verçin,^{1,†} and S. Yılmaz^{1,3,‡}

¹*Department of Physics, Ankara University, Faculty of Sciences, 06100, Tandoğan-Ankara, Turkey*

²*Department of Physics, Bozok University, Faculty of Sciences and Art 66200, Yozgat, Turkey*

³*Department of Physics, Amasya University, Faculty of Sciences and Art 05100, Amasya, Turkey*

(Received 8 August 2014; published 16 October 2014)

For any $N \otimes N$ -type bipartite system with even $N > 2$, two-parameter continuous families of unital block-dephasing quantum channels and of weakly optimal entanglement witnesses are constructed from special forms of a parametrized positive map. The parameter domains of the families are complementary subsets of a convex set and this fact reveals unusual combination rules of quantum channels and entanglement witnesses. These rules make it possible to develop many physically implementable direct entanglement-detection methods that provide a unified framework to accomplish both information-processing and entanglement-detection tasks by means of smooth quantum channels, without any reference to entanglement witnesses.

DOI: [10.1103/PhysRevA.90.042320](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.90.042320)

PACS number(s): 03.67.Mn, 03.65.Ud, 03.65.Yz

Reduced quantum dynamics with initial system-environment correlations characterized by pure Markov states

A. Türkmen^{1,2,*}, A. Verçin^{1,†} and S. Yılmaz^{1,3‡}

¹ *Department of Physics, Ankara University, Faculty of Sciences, 06100, Tandoğan-Ankara, Turkey*

² *Department of Physics, Ordu University, Faculty of Sciences and Arts, 52200, Ordu, Turkey*

³ *Department of Physics, Amasya University, Faculty of Sciences and Arts, 05100, Amasya, Turkey.*

(Dated: March 17, 2016)

Any tripartite state which saturates the strong subadditivity relation for the quantum entropy is defined as the Markov state. A tripartite pure state describing an open system, its environment and their purifying system is a pure Markov state iff the bipartite marginal state of purifying system and environment is a product state. It has been shown that as long as the purification of the input system-environment state is a pure Markov state the reduced dynamics of the open system can be described, on the support of initial system state, by a quantum channel for every joint unitary evolution of the system-environment composite even in the presence of initial correlations. Entanglement, discord and classical correlations of the initial system-environment states implied by the pure Markov state are analyzed and it has been shown that all these correlations are entirely specified by the entropy of the environment. Some implications concerning perfect quantum error correction procedure and quantum Markovian dynamics are presented.

PACS numbers: 03.65.Yz, 03.67.-a, 03.67.Mn.

***KOBİT-O** düzenleyicilerinin nazik
davetleri için*

*Değerli vakitleriniz, sabrınız ve
sorularınız için,*

***D. Duran** ve **S. Yılmaz**'a bu sunumu
hazırlamamdaki yardımları için,*

TEŞEKKÜRLER...